LE TIMBRE SONORE

# Modélisation du timbre

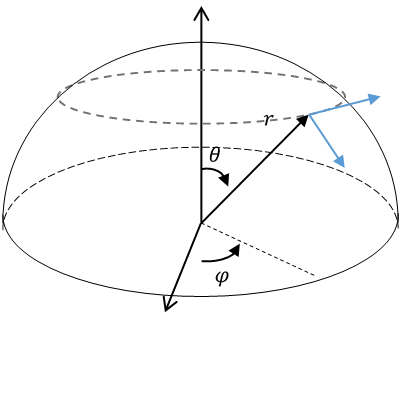


Figure 1 : Repère du timbre

On modélise la sonnette comme la coque d’une demi-sphère de rayon repérée par rapport à son centre en coordonnées sphériques selon la Figure 1.

On fait également l’hypothèse que la coque de la sonnette est très fine (épaisseur ) de sorte que pour chaque point de la coque on peut écrire : .

L’équation fondamentale de la dynamique s’écrit :

Avec :

* La rigidité de flexion
* épaisseur
* masse volumique
* module d'Young
* coefficient de poisson
* opérateur biharmonique (double laplacien)

On cherche les solutions sous la forme suivante :

L’équation se réécrit :

Soit encore :

Avec :

En remarquant que l’on peut écrire :

On particularise encore la solution en deux parties :

Dans le repère sphérique le Laplacien s’écrit :

Comme la coque est très fine, on peut considérer que est constant égal à et que donc les ondes décrites par l’équation (2) se propagent essentiellement en suivant la surface de la sonnette c’est-à-dire avec des variations selon et  :

En posant , le laplacien devient :

On cherche les solutions en séparant les variables :

On écrit :

Dans cette équation, le terme à droite de l’égalité ne dépend que de , et le terme à gauche de l’égalité ne dépend que de , le système revient à dire que chacun des termes est constant égal à une constante λ. On obtient donc :

Ceci se réécrit :

Soit encore :

Et on aurait de même :

Il faut se rappeler que pour ces équations :

Les solutions de la deuxième équation sont des fonctions exponentielles avec :

Physiquement, les fonctions et sont périodiques. Ceci veut dire que doit être un nombre entier

On peut écrire en posant :

La périodicité en impose que m soit un nombre entier.

Il reste à résoudre l’équation :

Pour chercher des solutions à cette équation (10) on peut effectuer un changement de variable.

En posant  on peut montrer que l’équation peut s’écrire avec :

Cette équation est une équation dite « équation de Legendre associée » (« *associated Legendre equation »*). :

On peut réécrire l’équation (11) en cherchant une solution sous la forme :

Dans ce cas l’équation se réécrit avec :

On cherche la solution sous la forme d’une série entière convergente sur :

En remplaçant dans l’équation précédente on obtient :

Ceci revient à :

Pour , les coefficients de valent :

Et les deux premiers coefficients valent respectivement pour et :

On doit donc avoir, pour que tous les coefficients soient nuls :

En remplaçant les dérivées de dans l’équation (12) pour que tous les coefficients soient nuls on peut écrire (tous les coefficients sont nuls) :

Pour éviter la divergence de la série (lorsque ) il faut que tous les coefficients soient nuls à partir d’un certain rang.

Ceci signifie que les valeurs de qui conviennent doivent vérifier pour un :

On doit remarquer que la relation de récurrence entre les coefficients de la série entière est d’ordre 2 pour que tous les coefficients soient nuls à partir d’un certain rang, il faut que tous les coefficients soient de même parité que .

En posant , ceci se réécrit :

Les solutions en fréquence sont donc :

Ce qui veut dire :

C’est-à-dire :

Soit :

On a donc un terme d’atténuation et un terme harmonique  avec :

L’écriture des modes de vibration du timbre est établie comme suit.

On dispose des grandeurs caractéristiques du matériau et de la géométrie du timbre :

* La rigidité de flexion (kg m2 s-2)
* R rayon du timbre (m)
* épaisseur (m)
* masse volumique (kg m-3)
* module d'Young (kg m-1 s-2=pa)
* coefficient de poisson (sans unité)
* amortissement (kg m-2 s-1)

On calcule deux coefficients caractéristiques du matériau et de la géométrie du timbre :

* Le coefficient d’atténuation (en s-1)
* Le coefficient de rigidité (en s-2)

On choisit ensuite deux entiers et qui déterminent le mode de vibration.

Pour chaque couple ( choisis, on détermine le coefficient qui permet de calculer la fréquence de vibration :

Le mode de vibration s’écrit de la façon suivante :

Les élongations s’écrivent pour et choisis :

Avec

Pour calculer les coefficients de , on calcule d’abord :

Si est pair, tous les coefficients avec impair sont nuls.

Si est impair, tous les coefficients avec pair sont nuls.

Ensuite pour variant de à , on calcule :

On commence à pour les coefficients pairs.

On commence à pour les coefficients impairs.

En raison de la relation de récurrence entre les coefficients, on remarque que tous les coefficients pairs sont proportionnels à et tous les coefficients impairs sont proportionnels à .

On peut donc ajuster les coefficients à partir des conditions aux limites.

Paramètres pour application numérique :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Matériau** | Masse volumique [kg/m3] | Module de Young E [Gpa] | Coefficient de Poisson ν |
| **acier** | 7850 | 210 | 0.24 à 0,30 |
| **aluminium** | 2700 | 62 | 0.24 à 0,33 |
| **cuivre** | 8920 | 128 | 0.33 |
| **laiton**  (70% Cu + 30%Zn) | 8470 | 80 à 100 | 0,37 |